0.1 Compactly generated spaces

Definition 0.1.1

X を位相空間としたとき、部分集合 $Y \subset X$ が k-closed sets とは、任意の compact Hausdorff 空間 K と X への連続写像 $u : K \longrightarrow X$ に対し、$u^{-1}(Y)$ が closed in K となる集合である。X は元々空間であるが、その位相とは別に、$\{$k-closed subset of $Y\}$ を閉集合に指定することにより、X の位相となる。これを k-位相（k-topology）と呼ぶ。X に k-位相を指定した空間を kX と書く。$kX = X$ となるとき、X を compactly generated と呼ぶ。

Remark 0.1.2

$Y \subset X$ が closed set in X なら、k-closed であることは明らかである。よって、一般的に k-位相の方が元の位相よりも弱い（開集合、閉集合が多い）。よって、identity $id : kX \longrightarrow X$ は連続であるが、$id : X \longrightarrow kX$ は連続かどうか定かでない。

Remark 0.1.3

$k(kX) = kX$ であるので、kX は compactly generated である。

Example 0.1.4

距離空間は compactly generated である。

proof)　　X を距離空間とする。$Y \subset X$ を k-closed としたとき、Y が closed であることを言えばよい。そこで x に収束する X の点列、$y_1, y_2, \cdots, y_n, \cdots \longrightarrow x$ というもので、各 $y_k \in Y$ というものを考える。このとき、$x \in Y$ であることを示せばよい。ここで、$\mathbf{N}_\infty$ を $\mathbf{N}$ の一点 compact 化とし、$u : \mathbf{N}_\infty \longrightarrow X$ を $k \mapsto y_k, \infty \mapsto x$ とすればこれは連続である。Y は k-closed であるから、$k^{-1}(Y)$ が closed in $\mathbf{N}_\infty$。ここで、$\mathbf{N} \subset k^{-1}(Y)$ であるが、$\mathbf{N}$ は dense in $\mathbf{N}_\infty$ なので、$\infty \in k^{-1}(Y)$ でよって、$x \in Y$

$\square$

Example 0.1.5

Locally compact Hausdorff space は compactly generated である。

proof)　　X を Locally compact Hausdorff 空間とする。$Y \subset X$ を k-closed としたとき、Y が closed であることを言えばよい。よって、$\overline{Y} \subset Y$ であることを言えばよい。$x \in \overline{Y}$ に対し、X が locally compact であるから、$x \in U$ という open in X が存在し、$\overline{U}$ は compact となる。X は Hausedorff だから、$\overline{U}$ は compact Hausdorff となる。inclusion $j : \overline{U} \longrightarrow X$ を考えると、Y が k-closed であるから、$j^{-1}(Y) = \overline{U} \cap Y$ は closed in $\overline{U}$。よって、

$$x \in U \cap \overline{Y} \subset \overline{U} \cap \overline{Y} \subset \overline{\overline{U} \cap Y} = \overline{U} \cap Y$$

であるため、$x \in Y$ となる。

$\square$

Remark 0.1.6

K を compact Hausdorff、$u : K \longrightarrow X$ とし、identity $j : X \longrightarrow kX$（連続とは限らない）とおくたとき、写像の連続とは閉集合の逆像が閉集合かで判断できるため、u が連続 $\iff j \circ u : K \longrightarrow kX$ が連続

Corollary 0.1.7

$f : X \longrightarrow Y$ で X を compactly generated 空間、Y を空間とし、identity $j : Y \longrightarrow kY$（連続とは限らない）とおく。このとき、f が連続 $\iff j \circ f : X \longrightarrow kY$ が連続。

proof)　　$f : X \longrightarrow Y$ を連続とする。$Z \subset Y$ を k-closed とし、$(j \circ f)^{-1}(Z) = f^{-1}(Z) \subset X$ が closed であることを示す。このとき、任意の compact Hausdorff 空間 K と連続写像 $u : K \longrightarrow X$ を考えると、$u^{-1}(f^{-1}(Z)) = (f \circ u)^{-1}(Z)$ は Z が k-closed より、closed in K である。X が compactly generated なので、$f^{-1}(Z)$ は closed in X である。

逆に、$f : X \longrightarrow kY$ を連続とする。$Z \subset Y$ を closed としたとき、Z は k-closed でもあるので $f^{-1}(Z)$ は closed であり、f は連続。

□

Corollary 0.1.8

$j_{kX,X} : kX \longrightarrow X, j_{Y,kY}$ を identity としたとき、$f : X \longrightarrow Y$ が連続ならば、$j_{Y,kY} \circ f \circ j_{kX,X} : kX \longrightarrow kY$ は連続である。

Proposition 0.1.9

X を compactly generated としたとき、それを同値関係で割った商空間 $X/\sim$ も compactly generate である。

proof)　　$p : X \longrightarrow X/\sim$ を projection とする。$X/\sim$ の closed set A は $p^{-1}(A)$：closed in X で定義されている。今、$A \subset X/\sim$ を k-closed set とすると、任意の compact Hausedorff 空間 K を連続写像 $u : K \longrightarrow X$ を考えたとき、$u^{-1}(p^{-1}(A)) = (p \circ u)^{-1}(A)$ は closed in K である。よって、$p^{-1}(A)$ は k-closed in X であり、X は compactly generated であるから $p^{-1}(A)$ は closed in X。よって、A は closed in $X/\sim$ なので、$X/\sim$ は compactly generated である。

□

Proposition 0.1.10

$\{X_i\}_{i \in I}$ を compactly generate 空間の族とする。このとき、$\coprod_{i \in I} X_i$ も compactly generated である。

proof)　　$A \subset \coprod_{i \in I} X_i$ を k-closed とする。$A = \coprod_{i \in I} A_i$ と書ける。ただし、$A_i = A \cap X_i$。このとき、任意の compact Hausdorff 空間 K と連続写像 $u : K \longrightarrow X_i$ に対し、$j : X_i \longrightarrow \coprod X_i$ を inclusion とすると、$u^{-1}(A_i) = u^{-1}(j^{-1}(A)) = (j \circ u)^{-1}(A)$ は A は k-closed より、closed in K。つまり、A_i は k-closed in X_i であり、X_i は compactly generated であるから、A_i は closed in X_i。よって、A は closed in $\coprod X_i$ であるから、$\coprod X_i$ は compactly generated.

□

Corollary 0.1.11

CG を compactly generated space を object とした Top の full subcategory とする。このとき、$F : D \longrightarrow CG$ を small category からの functor とすれば、Top での colim$F \in CG$ であり、これが CG での colimit object でもある。

残念ながら limit はそんなに簡単にはいかない。例えば、一般的に compactly generated 空間の直積、あるいは部分空間などは compactly generated にはならない。(compact の時と同様)

Definition 0.1.12

$k : Top \longrightarrow CG$ を object 対応を $X \mapsto kX$、morphism 対応を $f \mapsto j_{Y,kY} \circ f \circ j_{kX,X}$ で決めると、Cor 0.1.8 により、これは functor となる。

Proposition 0.1.13

$i : CG \Longleftrightarrow Top : k$ である。ただし、i は inclusion functor

proof)　　$X \in \mathrm{ob}(CG), Y \in Top$ を考え、

$$\alpha : \mathrm{Hom}_{CG}(X, kY) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{Top}(iX, Y) = \mathrm{Hom}_{Top}(X, Y)$$

を、次のように与える。$j_{kY,Y} : kY \longrightarrow Y$ を identity とすると、Y の closed set は k-closed、つまり kY での closed set であるため、$\alpha(f) = j_{kY,Y} \circ f$ とする。逆に、

$$\beta : \mathrm{Hom}_{Top}(iX, Y) = \mathrm{Hom}_{Top}(X, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{CG}(X, kY)$$

は Cor 0.1.7 より、X が compactly generated なので、identity $j_{Y,kY} : Y \longrightarrow kY$ に対し、$f \mapsto j_{Y,kY} \circ f$ で対応がつく。α, β は結局定義域、値域の位相と所属が変わるだけで写像としては何も変化していないので互いに inverce である。

□

Corollary 0.1.14

$F : D \longrightarrow CG$ を small category からの functor とすれば、$k(\lim F)$ が CG での limit object である。特に、$X \times_0 Y$ を通常の空間の意味での product と書いたときに、$X \times Y = k(X \times_0 Y)$ と書くことにする。

Proposition 0.1.15

CG の category において、

1. weak equivalence is weak homotopy equivalence
2. fibration is Serre fibration
3. cofibration is retract of inclusion of relative cell complex

の指定により、これは model category となり、$i : CG \Longleftrightarrow Top : k$ は Quillen equivalence である。

Definition 0.1.16

空間 X が weakly Hausdorff とは任意の compact Hausdorff 空間 K と連続写像 $u : K \longrightarrow X$ に対し、$u(K)$ が closed in X となることである。

Remark 0.1.17

Hausdorff 空間は $u(K)$ が compact set で closed となるので weakly Hausdorff である。

Lemma 0.1.18

weakly Hausdorff 空間の部分空間は weakly Hausdorff である。

proof)　　X を weakly Hausdorff とし、$A \subset X$ を考える。このとき任意の compact Hausdorff 空間 K と連続写像 $u : K \longrightarrow A$ に対し、$i : A \longrightarrow X$ を inclusion とすると、$i \circ u(K) = i(u(K)) = u(K)$ は X が weakly Hausdorff だから closed in X。$u(K) \subset A$ であるので、$u(K) \cap A = u(K)$ は closed in A

$\square$

Proposition 0.1.19

X を compactly generated 空間としたとき、X が weakly Hausdorff であることと、diagonal set $\Delta_X \subset X \times X$ が closed in $X \times X$ であることは同値。

proof)　　X を weak Hausdorff とする。このとき、$x \in X$ に対し、x への inclusion $* \longrightarrow X$ を考えると、$*$ は compact Hausdorff なので、$\{x\} \subset X$ は closed in X であることが分かる。つまり、X は T_1-space である。さて、Δ_X が closed を示すには、X が compactly generated より、任意の compact Hausdorff 空間 K と連続写像 $u = (v, w) : K \longrightarrow X \times X$ に対し、$u^{-1}(\Delta)$ が closed in K であることを示せばよい。ただし、projection $p_1, p_2 : X \times X \longrightarrow X$ は本来 $X \times_0 X \longrightarrow X$ として存在するもので、$p_1, p_2 : X \times X = k(X \times_0 X) \xrightarrow{j} X \times_0 X \longrightarrow X$ という意味である。j は連続なので、p_1, p_2 も連続で、v, w も連続である。

$(u^{-1}(\Delta_X))^c$ が open であることを示せばよい。つまり、任意の $a \in (u^{-1}(\Delta_X))^c$ を取ったとき、a の開近傍で $(u^{-1}(\Delta_X))^c$ に含まれるものを見つける。$v(a) \neq w(a)$ である。このとき、$U = v^{-1}(\{w_a\}^c)$ とおくと、$\{w_a\}$ は closed in X なので、U は open in K であり、$a \in U$ である。K は compact Hausdorff なので、$a \in V \subset \overline{V} \subset U$ となる open set V が存在する。$w_a \notin v(U)$ なのだから、$w(a) \notin v(\overline{V})$ であり、このことから、$a \in w^{-1}(v(\overline{V})^c) = W$ とおく。K が compact Hausdorff であるから $\overline{V}$ も compact Hausdorff で、X が weak Hausdorff から、$v(\overline{V})$ は closed。つまり、よって、その complement の逆像は open。W は open in K である。これより、$a \in V \cap W$ であるが、$(V \cap W) \cap u^{-1}(\Delta_X) = \phi$ であるのは調べれば分かる。よって、$a \in V \cap W \subset (u^{-1}(\Delta_X))^c$ である。

逆に、Δ_X が closed in $X \times X$ であるとする。このとき、任意の compact Hausdorff 空間 K と連続写像 $u : K \longrightarrow X$ に対し、$u(K)$ が closed in X を示す。X は compactly generated であるので、別に任意の compact Hausdorff 空間 L と連続写像、$v : L \longrightarrow X$ に対し、$v^{-1}(u(K))$ が closed in L を示せばよい。今、$(u, v) : K \times L \longrightarrow X$ を考えると、$(u, v)^{-1}(\Delta_X)$ は Δ_X が closed より、closed in $K \times L$ である。$K \times L$ も compact Hausdorff なのだから、$M = (u, v)^{-1}(\Delta_X)$ もそうである。

$p_L : K \times L \longrightarrow L$ を projection とすると、$p_L(M) = v^{-1}u(K)$ となり、これは compact in L である。つまり、closed である。よって、$v^{-1}u(K)$ は closed in L なので、X が compactly generated より、$u(K)$ は closed である。

□

Corollary 0.1.20

$\{X_i\}_{i \in I}$ を compactly generated weakly Hausdorff 空間の族とする。このとき、$\prod_{i \in I} X_i$（CG-topology）も compactly generated weakly Hausdorff 空間である。

proof)　$\pi_i : X = \prod_{i \in I} X_i \longrightarrow X_i$ を pojection とすると、Cor 0.1.7 から、これは連続。$p_i = \pi_i \times \pi_i : X \times X \longrightarrow X_i \times X_i$ とおくと、Δ_{X_i} は closed in $X_i \times X_i$ なので、$p_i^{-1}(\Delta_{X_i})$: closed in $X \times X$。

$$\Delta_X = \bigcap p_i^{-1}(\Delta_{X_i})$$

であるので、Δ_X は closed in $X \times X$。Prop 0.1.19 により、X も weakly Hausdorff である。

□

Corollary 0.1.21

CGH を compactly generated weakly Hausdorff space を object とした CG(Top) の full subcategory とする。このとき、$F : D \longrightarrow CGH$ を small category からの functor とすれば、CG での $\lim F \in CGH$ であり、これが CGH での limit object でもある。

残念ながら colimit はそんなに簡単にはいかない。例えば、一般的に weakly Hausdorff 空間の商空間などは weakly Hausdorff にはならない。（Hausdorff の時と同様）

Lemma 0.1.22

$f : X \longrightarrow Y, g : Z \longrightarrow W$ を CG における map とする。つまり、X, Y, Z, W は compactly generated とした連続写像。このとき、f, g が quotient map ならば、$f \times g : X \times Z \longrightarrow Y \times W$ in CG も quocient map である。

proof)　省略

□

Proposition 0.1.23

X を compactly generated 空間、$E \subset X \times X$ を X の equivalence relation とする。このとき、X/E が weakly Hausdorff であることと、E : closed in $X \times X$ であることは同値である。

proof)　Prop 0.1.19 により、$\Delta_{X/E}$ が closed in $X/E \times X/E$ と X/E が weakly Hausdorff であることが同値である。よって、$q : X \longrightarrow X/E$ を quotient map とすると、Lemma 0.1.22 により、$q \times q : X \times X \longrightarrow X/E \times X/E$ も quotient map となる。つまり、$\Delta_{X/E}$ が closed であることと、$(q \times q)^{-1}(\Delta_{X/E}) = E$ が closed であることが同値。よって、題意が示された。

□

Definition 0.1.24

X を compactly generated 空間としたとき、$\mathcal{R} = \{\text{closed equivalence relation of } X\}$ とおき、$E = \bigcap_{R \in \mathcal{R}} R \subset X \times X$ とおくと、これは最小の closed equivalence relation of X である。このとき、$w(X) = X/E$ とすれば、これは Prop 0.1.23 により compactly generated weakly Hausdorff 空間になる。これを X の maximal weakly Hausdorff quotient と呼ぶ。X が元々weakly Hausdorff なら closed equivalence relation として Δ_X が取れるため、$w(X) = X/\Delta_X = X$ で変化は無い。

Lemma 0.1.25

$f : X \longrightarrow Y$ を連続写像とし、X を compactly generated 空間、Y を compactly generate weakly Hausdorff 空間とする。このとき、f は

$$f : X \xrightarrow{p} w(X) \xrightarrow{\bar{f}} Y$$

と一意に分解できる。ただし、$p : X \longrightarrow w(X) = X/E$ は projection。

proof) $R = (f \times f)^{-1}(\Delta_Y^{-1}) \subset X \times X$ は X の closed equivalence relation である。よって、$E \subset R$ である。これより、$w(X) = X/E \longrightarrow Y/\Delta_Y = Y$ が $[x] \mapsto f(x)$ で well defined で定義され、$f : X \xrightarrow{p} w(X) \longrightarrow Y$ の分解を一意に与える。

□

Corollary 0.1.26

$f : X \longrightarrow Y$ を compactly generated 空間の間の連続写像としたとき、

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & Y \arrow[d, "q"] \\ w(X) \arrow[r, dotted, "\tilde{f}"'] & w(Y) \end{tikzcd}$$

を可換にする $\tilde{f}$ が一意に存在する。ただし、p, q は projection。

proof) $q \circ f : X \longrightarrow w(Y)$ に Lemma 0.1.25 を適用すればよい。

□

Definition 0.1.27

CGH を compactly generated weakly Hausdorff 空間を object とした CG(Top) の full subcategory とする。このとき、$w : CG \longrightarrow CGH$ は object 対応を $X \mapsto wX$、morphism 対応を $f \mapsto \tilde{f}$ とすれば、これは functor となる。

Proposition 0.1.28

$w : CG \Longleftrightarrow CGH : i$ である。ただし、i は inclusion functor

proof)　　$X \in \mathrm{ob}(CG), Y \in \mathrm{ob}(CGH)$ とする。このとき、

$$\alpha : \mathrm{Hom}_{CG}(X, iY) = \mathrm{Hom}_{CG}(X, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{CGH}(wX, Y)$$

を Lemma 0.1.25 より、$f \mapsto \overline{f}$ で定義する。逆に、

$$\beta : \mathrm{Hom}_{CGH}(wX, Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{CG}(X, iY) = \mathrm{Hom}_{CG}(X, Y)$$

は、$f \mapsto p \circ f$ で定義する。ただし、$p : X \longrightarrow wX$ は projection。明らかに、$\beta \circ \alpha = 1_{\mathrm{Hom}_{CG}(X,Y)}$。逆に、$\alpha \circ \beta = 1_{\mathrm{Hom}_{CGH}(wX,Y)}$ は $\overline{f}$ の一意性から導かれる。

□

Corollary 0.1.29

$F : D \longrightarrow CGH$ を small category からの functor とすれば、$w(\mathrm{colim} F)$ が CGH での colimit object である。

Proposition 0.1.30

CGH の category において、

1. weak equivalence is weak homotopy equivalence
2. fibration is Serre fibration
3. cofibration is retract of inclusion of relative cell complex

の指定により、これは model category となり、$w : CG \Longleftrightarrow CGH : i$ は Quillen equivalence である。